Математическая олимпиада школьников Республики Татарстан
Муниципальный тур 2010 года

7 класс

1. Две черепахи ползут наперегонки. Первая проползает 4 метра за каждые 9 часов, а вторая 5 метров за каждые 11 часов. Какая черепаха ползет быстрее?

Решение. За 99 часов первая черепаха проползает 44 метра, а вторая 45.

Ответ. Вторая.

2. Пройдя половину пути, пароход увеличил скорость на 25 процентов, благодаря чему прибыл на конечный пункт на полчаса раньше срока. Сколько времени затратил пароход на весь путь?

Решение. Если первоначальная скорость равна v км. в час, а путь парохода есть s км., то расчетное время в пути равно $t = \frac{s}{v}$ часов. Увеличив скорость на 25 процентов, мы получим $1,25v$, то есть вторая половина пути будет пройдена за $\frac{s}{2\cdot 1,25v} = 0,4t$ часов, а весь путь за $0,9t$ часов. Значит, $0,1t = 0,5$, то есть $t = 5$ часов, а $0,9t = 4,5$ часов.

Ответ. 4,5 часа.

3. На прямой отметили несколько точек. Между каждыми соседними точками вставили по две точки. Получили новую систему точек, состоящую из "старых"и "новых"точек. С новой системой проделали еще раз ту же процедуру. Сколько точек было в начале, если в результате получилось 1000 точек?

Решение. Пусть сначала было x точек. Между ними было $x-1$ промежутков, так что вставили $2(x-1)$ точек, и всего их стало $y = x + 2(x-1) = 3x-2$. После повторения процедуры их станет $3y-2 = 3(3x-2)-2 = 9x-8$. Приравняв это число 1000, получим $x = 112$.

Ответ. 112

4. Можно ли разрезать прямоугольник со сторонами 8 и 4 на три треугольника, из которых можно сложить квадрат?

Решение. См. рисунок 7.4

Ответ. Можно.

8 класс

1. Решите уравнение, содержащее 2010 пар скобок:

$$x - (x - (x - \cdots - (x - (x - 1005))\dots)) = 1005.$$

Решение. После раскрытия двух пар скобок получаем уравнение того же вида с меньшим на 2 чмслом пар скобок. Поскольку число 2010 четно, то в конце концов получим $x - 1005 = 1005$, то есть $x = 2010$.

Ответ. $x = 2010$.

2. В прямоугольном треугольнике ABC на гипотенузе AB взяты точки K и M так что $AK = AC$, $BM = BC$. Найти $\angle MCK$.

Решение. Обозначим $\angle BAC = \alpha$, $\angle ABC = \beta$. Из равнобедреных треугольников $\triangle AKC$

и $\triangle BMC$ (см.рисунок 8.2) находим $\angle CMB = \frac{180^\circ - \beta}{2}$, $\angle CKA = \frac{180^\circ - \alpha}{2}$, $\angle MCK = 180^\circ - \angle CMB - \angle CKA = \frac{\alpha+\beta}{2} = 45^\circ$.

Ответ. 45°.

3. Каких прямоугольников с целыми сторонами больше: с периметром 2008 или с периметром 2010? (Прямоугольники $a \times b$ и $b \times a$ считаются одинаковыми.)

Решение. Если прямоугольник периметра p (p - целое числа) имеет стороны a и b, то $a+b = \frac{p}{2}$. Если $a \leqslant b$, то отсюда $a \leqslant \frac{p}{4}$, то есть число таких прямоугольников есть наибольшее из целых чисел, не превосходящих $\frac{p}{4}$ (целая часть $\frac{p}{4}$), Поскольку целые части чисел $\frac{2008}{4} = 502$ и $\frac{2010}{4} = 502,5$ одинаковы, то и количества прямоугольников этих двух периметров равны друг другу.

Ответ. Их одинаковое количество.

4. Докажите, что из любых 2600 целых чисел можно выбрать два таких числа, что их разность делится на все натуральные числа до 10 включительно.

Решение. Наименьшее общее кратное натуральных чисел от 1 до 10 включительно равно 2520. Найдем остатки от деления заданных 2600 чисел на 2520. Поскольку число возможных различных остатков равно $2520 < 2600$, то среди этих остатков найдется два одинаковых, и разность соответствующих чисел делится на все натуральные числа, не превосходящие 10.

9 класс

1. Сумма нескольких чисел равна 100. Может ли сумма их квадратов быть меньше $0,01$?

Решение. Возьмем n одинаковых чисел. Раз их сумма равна 100, то каждое из них равно $\frac{100}{n}$, а сумма их квадратов есть $n \cdot \frac{100^2}{n^2} = \frac{10000}{n}$. При $n > 1000000$ эта сумма меньше $0,01$

Ответ. Может.

2. Когда Пиноккио обманывает, число бородавок на его носу удваивается, а когда говорит правду, одна бородавка пропадает. Сегодня он три раза соврал и два раза сказал правду. К вечеру у него на носу оказалось пять бородавок. Сколько их было в начале дня ?

Решение. Пиноккио говорил 5 раз. Последний раз он сказал правду, так как в обратном случае число бородавок после пятого высказывания было бы четным. Значит, после четвертого высказывания у него было 6 бородавок, и из этих четырех высказываний лишь одно правдиво. Это правдивое высказывание не может быть четвертым, така как тогда после него число бородавок было бы нечетным. Итак, четвертый раз он соврал, и после третьего высказывания у него было 3 бородавки. Точно также заключаем, что третье высказывание было правдивым, то есть после второго высказывания у него было 4 бородавки и оба первых высказывания лживы. Значит, у тром у него была 1 бородавка.

Ответ. 1

3. Докажите, что из любых 2600 целых чисел можно выбрать два таких числа, что их разность делится на все натуральные числа до 10 включительно.

Решение. См. решение задачи 8.4

4. Каждая диагональ четырехугольника делит его площадь в отношении 1 : 2. Докажите, что этот четырехугольник – трапеция.

Решение. Пусть диагонали AC и BD четырехугольника $ABCD$ делят его площадь в одинаковом отношении. Тогда треугольники $\triangle ABC$ и $\triangle ABD$ имеют одинаковую площадь и общее основание AB. Поэтому их высоты, опущщеные из точек B и D, равны (см. рисунок 9.4). Но тогда $AB \| CD$, то есть этот четырехугольник - трапеция.

5. На доске 100×100 расставлено 100 ладей, не бьющих друг друга. Докажите, что в правом верхнем и в левом нижнем квадратах размером 50×50 расставлено равное число ладей.

Решение. Раз ладьи не бьют друг друга, то в каждой вертикали и горизонтали их не более одной. Но число ладей равно числу вертикалей и числу горизонталей. Поэтому в каждой вертикали и в каждой горизонтали стоит ровно по одной ладье.

Пусть число ладей в правом верхнем квадрате размером 50×50 равно x. Они стоят в x из 50 правых вертикалей. Тогда в остальных из $50 - x$ правых вертикалей ладьи стоят в правом нижнем квадрате. Они стоят в $50-x$ из 50 нижних горизонталей. Тогда в остальных $50-(50-x) = x$ нижних горизонталей ладьи стоят в левом нижнем квадрате размера 50×50, то есть число ладей в этом квадрате равно x, что и требовалось доказать.

10 класс

1. Сумма нескольких чисел равна 2010. Может ли сумма их квадратов быть меньше $0,001$?

Решение. Возьмем n одинаковых чисел. Раз их сумма равна 2010, то каждое из них равно $\frac{2010}{n}$, а сумма их квадратов есть $n \cdot \frac{2010^2}{n^2} = \frac{10000}{n}$. При $n > 1000 \cdot 2010^2$ эта сумма меньше $0,001$.

Ответ. Может.

2. Построить на плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют равенству $4y^2 - 2x^2 - 1 = |4x^2 - 2y^2 - 1|$.

Решение. Рассмотрим 2 случая.

Случай 1. Пусть $4x^2 - 2y^2 - 1 \geqslant 0$. Тогда $4y^2 - 2x^2 - 1 = 4x^2 - 2y^2 - 1$ и отсюда $y^2 = x^2$, то есть $y = \pm x$. Это уравнение двух прямых. Но условие $4x^2 - 2y^2 - 1 \geqslant 0$ выполняется на этих прямых лишь если $2x^2 \geqslant 1$, то есть при $|x| \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$. Получаем 4 луча – части прямых $y = \pm x$, лежащие в полуплоскостях $|x| \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Случай 2. Пусть $4x^2 - 2y^2 - 1 < 0$. Тогда $4y^2 - 2x^2 - 1 = -4x^2 + 2y^2 + 1$ и отсюда $x^2 + y^2 = 1$. Это окружность с радиусом 1 и с центром в начале координат. Но условие $4x^2 - 2y^2 - 1 < 0$ выполняется на этой окружности лишь при $2y^2 \geqslant 1$, то есть при $|y| \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$. Получаем две дуги окружности $x^2 + y^2 = 1$,лежащие в полуплоскостях $|y| \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Ответ. См. рисвнок 10.2

3. На доске 2010×2010 расставлено 2010 ладей, не бьющих друг друга. В левом верхнем угловом квадрате размера 10×10 стоит 5 ладей. Сколько их в правом нижнем угловом квадрате размера 2000×2000 ?

Решение. Раз ладьи не бьют друг друга, то в каждой вертикали и горизонтали их не более одной. Но число ладей равно числу вертикалей и числу горизонталей. Поэтому в каждой вертикали и в каждой горизонтали стоит ровно по одной ладье.

Пусть число ладей в левом верхнем квадрате размером 10×10 равно 5. Они стоят в 5 из 10 левых вертикалей. Тогда в остальных 5 из 10 левых вертикалей ладьи стоят в левом нижнем прямоугольнике размера 10×2000. Они стоят в 5 из 2000 нижних горизонталей. Тогда в остальных 1995 нижних горизонталей ладьи стоят в правом нижнем квадрате размера 2000×2000, то есть число ладей в этом квадрате равно 1995.

Ответ. 1995.

4. Доказать, что число $2009!! + 2010!!$делится на 2011. Символ $N!!$ означает произведение всех не превосходящих числа N натуральных чисел, имеющих одинаковую четность с числом N.

Решение. $2009!! + 2010!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot 2009 + 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2010 = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot 2009 + (2011 - 1) \cdot (2011 - 3) \cdot (20011 - 5) \cdot \dots \cdot (2011 - 2009)$. Число сомножителей в последнем произведении равно 1005, то есть нечетно. Поэтому после раскрытия скобок слагаемое $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot 2009$ сократится, а остальные слагаемые содержат сомножитель 2011.

5. В возрастающей последовательности натуральных чисел каждое число, начиная с 2010-го, является делителем суммы всех предыдущих чисел. Докажите, что в последовательности найдётся некоторое число, начиная с которого каждое число равно сумме всех предыдущих.

Решение. Обозначим члены последовательности через $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$. Пусть S_n есть сумма первых n членов последовательности, $k_n = S_{n-1}/a_n$. По условию частные k_n при $n \geqslant 2010$ являются натуральными числами. В силу возрастания исходной последовательности получаем

$$k_{n+1} = S_n/a_{n+1} < S_n/a_n = (S_{n-1} + a_n)/a_n = k_n + 1,$$

а отсюда при $n \geqslant 2010$ получаем $k_{n+1} \leqslant k_n$, то есть начиная с номера 2010 последовательность частных k_n не возрастает. Но с этого же номера она состоит из натуральных чисел. Невозрастающая последовательность натуральных чисел становится постоянной начиная с некоторого номера. Итак, существуют натуральные k и $N \geqslant 2010$ такие что $k_n = k$ при $n \geqslant N$. Но тогда при $n \geqslant N$ имеем $a_{n+1} = S_n/k = (S_{n-1} + a_n)/k = (ka_n + a_n)/k = \frac{k+1}{k}a_n$, то есть начиная с этого номера последовательность представляет собою геометрическую прогрессию со знаменателем $\frac{k+1}{k}$ и $a_{N+m} = (\frac{k+1}{k})^m a_N$ при любом натуральном m. Тогда a_N делится на k^m при любом натуральном m, что возможно лишь при $k = 1$.

11 класс

1. Решить уравнение $\sqrt{\sin x} = \cos x$.

Решение. Простые преобразования дают $\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$ и отсюда $\sin x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Но отрицательный корень посторонний (он, кроме того, больше 1 по абсолютной величине). Итак, $\sin x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. Далее, $\cos x \geqslant 0$, и отсюда $x = \arcsin \frac{-1+\sqrt{5}}{2} + 360°n$.

Ответ. $x = \arcsin \frac{-1+\sqrt{5}}{2} + 360°n$.

2. Найдите наибольшее значение функции

$$y = \sqrt{x^2 - 2x + 10} - \sqrt{x^2 - 2x + 5}.$$

Решение.

$$y = \sqrt{x^2 - 2x + 10} - \sqrt{x^2 - 2x + 5} = \frac{5}{\sqrt{x^2 - 2x + 10} + \sqrt{x^2 - 2x + 5}} =$$

$$= \frac{5}{\sqrt{(x-1)^2+9}+\sqrt{(x-1)^2+4}} \leqslant 1.$$

При $x = 1$ это значение достигается.

Ответ. 1

3. На доске 2010×2010 расставлено 2010 ладей, не бьющих друг друга. В левом верхнем угловом квадрате размера 110×110 стоит 100 ладей. Сколько их в правом нижнем угловом квадрате размера 1900×1900 ?

Решение. Раз ладьи не бьют друг друга, то в каждой вертикали и горизонтали их не более одной. Но число ладей равно числу вертикалей и числу горизонталей. Поэтому в каждой вертикали и в каждой горизонтали стоит ровно по одной ладье.

Пусть число ладей в левом верхнем квадрате размером 110×110 равно 100. Они стоят в 100 из 110 левых вертикалей. Тогда в остальных 10 из 110 левых вертикалей ладьи стоят в левом нижнем прямоугольнике размера 110×1900. Они стоят в 10 из 1900 нижних горизонталей. Тогда в остальных 1890 нижних горизонталей ладьи стоят в правом нижнем квадрате размера 1900×1900, то есть число ладей в этом квадрате равно 1890.

Ответ. 1890.

4. Доказать, что число $11\ldots155\ldots56$ (здесь 2010 единиц и 2009 пятерок) является полным квадратом.

Решение. Обозначим через N число, состоящее из 2010 единиц. Тогда $9N + 1 = 100\ldots0$ (здесь 2010 нулей), то есть $N = \frac{10^{2010}-1}{9}$. Заданное в условии задачи число равно

$$N \cdot 10^{2010} + 5N + 1 = \frac{10^{2010}-1}{9} \cdot 10^{2010} + 5 \cdot \frac{10^{2010}-1}{9} + 1 =$$

$$= \frac{(10^{2010})^2}{9} + \frac{4}{9} \cdot 10^{2010} + \frac{4}{9} = (\frac{10^{2010}+2}{3})^2.$$

Но число $10^{2010} + 2$ делится на 3, потому что его сумма цифр равна трем. Значит, заданное число есть квадрат целого числа $\frac{10^{2010}+2}{3} = \frac{10^{2010}-1}{3} + 1 = 33\ldots4$ (2009 троек и одна четверка).

5. В возрастающей последовательности натуральных чисел каждое число, начиная с 2010-го, является делителем суммы всех предыдущих чисел. Докажите, что в последовательности найдётся некоторое число, начиная с которого каждое число равно сумме всех предыдущих.

Решение. См. задачу 10.5