

**Математическая олимпиада школьников Республики Татарстан  
Муниципальный тур 2011 года**

**7 класс**

*Не забывайте обосновывать свои ответы! Ответ без обоснования ценится намного ниже!*

1. Можно ли число 20 записать в виде суммы нескольких натуральных чисел, произведение которых тоже равно 20 ?
2. На листе бумаги начерчен угол величиной  $47^\circ$ . Построить на этом листе с помощью циркуля и линейки угол величиной  $31^\circ$ .
3. Пароход шел по течению реки со скоростью 24 км/час, а затем повернул обратно. Через некоторое время с него спустили на воду надувной плот (без мотора и весел). Затем пароход прошел против течения еще 15 км, после чего оказался на расстоянии 20 км от плота. Какова скорость парохода в стоячей воде ?
4. Можно ли поверхность куба с ребром 2 см целиком оклеить 12 бумажными квадратами, каждый из которых имеет площадь 2 квадратных сантиметра ?
5. Каждую сторону прямоугольника увеличили на метр, отчего его площадь увеличилась на 10 квадратных метров. Найти периметр исходного прямоугольника.

**Математическая олимпиада школьников Республики Татарстан  
Муниципальный тур 2011 года**

**8 класс**

*Не забывайте обосновывать свои ответы! Ответ без обоснования ценится намного ниже!*

**1.** Петр Петрович и его дедушка сегодня отмечают свой общий день рождения, причем дедушка в 3 раза старше. Известно, что были такие дни рождения, когда дедушка был старше Петра Петровича ровно в 4, 5, 6 и даже в 7 раз. Сколько лет исполнилось сегодня Петру Петровичу ?

**2.** На листе бумаги начерчен угол величиной  $43^\circ$ . Построить на этом листе с помощью циркуля и линейки угол величиной  $59^\circ$ .

**3.** Два путника вышли в путь одновременно. Один шел из А в Б, а второй из Б в А. Оба шли равномерно, но с разными скоростями. В момент встречи первому оставлось идти еще 16 часов, а второму 9 часов. Через сколько часов после старта они встретились ?

**4.** Два натуральных числа в сумме дают 2011, а при делении большего из них на меньшее с остатком частное равно 26. Найти все пары таких чисел.

**5.** Существует ли выпуклый многоугольник с 2011 диагоналями ?

**Математическая олимпиада школьников Республики Татарстан**  
**Муниципальный тур 2011 года**

**9 класс**

*Не забывайте обосновывать свои ответы! Ответ без обоснования ценится намного ниже!*

1. В ряде стран температуру меряют по шкале Фаренгейта, в которой температура плавления льда равна  $32^\circ$ , а температура кипения воды  $212^\circ$ . Существует ли температура, при которой шкалы Цельсия и Фаренгейта покажут одинаковые значения ?

2. Является ли число 2010 разностью кубов двух натуральных чисел ?

3. Построить параллелограмм, у которого середины трех сторон лежат в заданных точках.

4. Описанным кругом плоской фигуры называется наименьший из содержащих ее кругов, а вписанным – наибольший из содержащихся в ней кругов. Может ли ограниченная фигура иметь два различных

а) описанных

б) вписанных

круга ?

5. Сумма неотрицательных чисел  $a, b, c, d$  равна 1. Доказать, что тогда

$$ab + bc + cd + da \leq \frac{1}{4}.$$

**Математическая олимпиада школьников Республики Татарстан**  
**Муниципальный тур 2011 года**

**10 класс**

*Не забывайте обосновывать свои ответы! Ответ без обоснования ценится намного ниже!*

1. Найти все простые числа  $p$  и  $q$  такие что корни уравнения  $x^2 + px + q = 0$  целые.
2. Площадь треугольника равна четверти суммы квадратов двух его сторон. Найти угол между этими сторонами.
3. У какого прямоугольника периметр численно равен площади, а стороны являются целыми числами ?
4. Доказать, что функция

$$f(x) = \frac{1 + \sin x - \cos x}{1 + \sin x + \cos x}$$

нечетная при  $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ .

5. На плоскости задано  $n \geq 3$  точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Площадь любого треугольника с вершинами в этих точках не превосходит 1. Доказать, что тогда существует треугольник площади  $\leq 4$ , содержащий все эти точки.

**Математическая олимпиада школьников Республики Татарстан  
Муниципальный тур 2011 года**

**11 класс**

*Не забывайте обосновывать свои ответы! Ответ без обоснования ценится намного ниже!*

1. Какое наименьшее положительное число можно получить путем расстановки между числами

$$1, 2, 3, \dots, 2010, 2011$$

знаков плюс и минус и выполнения этих операций ?

2. При каких значениях положительных чисел  $a$  и  $b$  уравнение

$$\cos ax \cos bx = 1$$

имеет ненулевое решение ?

3. Пусть  $h$  есть высота прямоугольного треугольника, опущенная на его гипотенузу, а  $r$  – радиус вписанной в этот треугольник окружности. Найти первую цифру после запятой в десятичной записи отношения  $\frac{r}{h}$ .

4. На горизонтальной плоскости лежат 4 шара радиуса  $R$ , а их центры образуют квадрат со стороной  $2R$ . Сверху в лунку, образованную этими шарами, положили пятый шар такого же радиуса. Найти расстояние от его высшей точки до плоскости.

5. Доказать, что для любых неотрицательных чисел  $a, b, c, x, y, z$  справедливо неравенство

$$\sqrt[3]{xyz} + \sqrt[3]{abc} \leq \sqrt[3]{(x+a)(y+b)(z+c)}.$$