7 класс

1. Можно ли число 20 записать в виде суммы нескольких натуральных чисел, произведение которых тоже равно 20 ?

Решение. Можно, например $20 = 2 + 10 + 1 + \cdots + 1$.

2. На листе бумаги начерчен угол величиной $47°$. Построить на этом листе с помощью циркуля и линейки угол величиной $31°$.

Решение. Проведем окружность любого радиуса с центром в вершине начерченного угла. Этот угол выделяет дугу вличиной 47 дуговых градусов. Отложим эту дугу на окружности 7 раз. Получится дуга величиной $329°$, и ее дополнение до полной окружности дает $31°$.

3. Пароход шел по течению реки со скоростью 24 км/час, а затем повернул обратно. Через некоторое время с него спустили на воду надувной плот (без мотора и весел). Затем пароход прошел против течения еще 15 км, после чего оказался на расстоянии 20 км от плота. Какова скорость парохода в стоячей воде ?

Решение. Пусть x км/час есть скорость течения и плота. Тогда скорость парохода в стоячей воде равна $24 - x$ км/час, а против течения $24 - 2x$ км/час. После спуска плота на воду пароход прошел 15 км, а плот 20-15=5 км. Отсюда

$$\frac{5}{x} = \frac{15}{24 - 2x},$$

$5(24 - 2x) = 15x$, $x = 4.8$. Поэтому скорость парохода в стоячей воде равна 19.2 км/час.

4. Можно ли поверхность куба с ребром 2 см целиком оклеить 12 бумажными квадратами, каждый из которых имеет площадь 2 квадратных сантиметра ?

Решение. Можно. Диагональ таког квадрата имеет длину 2 см. Все квадраты нужно согнуть по диагонали на $90°$ и приклеить, приложив эти диагонали к каждому из 12 ребер куба.

5. Каждую сторону прямоугольника увеличили на метр, отчего его площадь увеличилась на 10 квадратных метров. Найти периметр исходного треугольника.

Решение. Обозначим стороны исходного прямоугольника x и y. По условию $(x + 1)(y + 1) - xy = 10$. Отсюда $x + y = 9$, так что периметр исходного прямоугольника равен 18 метров.

8 класс

1. Петр Петрович и его дедушка сегодня отмечают свой общий день рождения, причем дедушка в 3 раза старше. Известно, что были такие дни рождения, когда дедушка был старше Петра Петровича ровно в 4, 5, 6 и даже в 7 раз. Сколько лет исполнилось сегодня Петру Петровичу ?

Решение. Пусть x - это число лет, на сколько дедушка старше Петра Петровича. По условию x нацело делится на 2,3,4, 5 и 6. Но тогда x делится на 60, то есть равняется одному из чисел 60, 120, 180 и т.д. При $x \geqslant 120$ дедушке не меньше 180 лет, что невозможно. Итак, $x = 60$ и Петру Петровичу исполнилось 30 лет.

2. На листе бумаги начерчен угол величиной $43°$. Построить на этом листе с помощью циркуля и линейки угол величиной $59°$.

Решение. Проведем окружность любого радиуса с центром в вершине начерченного угла. Этот угол выделяет дугу вличиной 43 дуговых градусов. Отложим эту дугу на окружности 7 раз. Получится дуга величиной $301°$, и ее дополнение до полной окружности дает $59°$.

3. Два путника вышли в путь одновременно. Один шел из А в Б, а второй из Б в А. Оба шли равномерно,но с разными скоростями. В момент встречи первому оставлось идти еще 16 часов, а второму 9 часов. Через сколько часов после старта они встретились ?

Решение. Обозначим скорости первого и второго путников через x и y,а время от выхода до встречи через t. Приравнивая расстояния от пунктов А и Б до встречи путников, получаем $xt = 9y$, $yt = 16x$. Перемножив эти равенства, находим $t^2 = 144$, $t = 12$. Итак,они встретились через 12 часов.

4. Два натуральных числа в сумме дают 2011, а при делении большего из них на меньшее с остатком частное равно 26. Найти все пары таких чисел.

Решение. Обозначим большее из чисел через x, а меньшее через y. Тогда $x + y = 2011$, $x = 26y+r$, где r - остаток. Отсюда $27y+r = 2011$ и поскольку $0 \leqslant r < y$, то $27y \leqslant 2011 < 28y$. Отсюда $71.8 < y \leqslant 74.5$, то есть y может принимать значения 72, 73 и 74. Соответствующие значения x равны 1939, 1938 и 1937.

5. Существует ли выпуклый многоугольник с 2011 диагоналями ?

Решение. Не существует. Действительно, в выпуклом $n-$уголнике из каждой вершины исходит $n - 3$ диагонали, и общее их количество равно $\frac{n(n-3)}{2}$. Приравнивая $\frac{n(n-3)}{2} = 2011$, получаем уравнение $n^2 - 3n - 4022 = 0$, дискриминант которого 16097 не является квадратом натурального числа, то есть это уравнение не имеет целых решений.

9 класс

1. В ряде стран температуру меряют по шкале Фаренгейта, в которой температура плавления льда равна 32°, а температура кипения воды 212°. Существует ли температура, при которой шклы Цельсия и Фаренгейта покажут одинаковые значения ?

Решение. Пусть C и F означают температуру одной и той же среды в градусах Цельсия и Фаренгейта. Поскольку обе шкалы равномерные, то $F = AC + B$, где A и B – постоянные числа. По условию $F = 32$ при $C = 0$ и $F = 212$ при $C = 100$, то есть $B = 32$ и $212 = 100A+32$, откуда $A = 1.8$. Уравнение $C = 1.8C + 32$ дает $C = -40$, то есть при температуре $-40C^\circ$ градусник Фаренгейта покажет $-40F^\circ$.

2. Является ли число 2010 разностью кубов двух натуральных чисел ?

Решение. Нет, не является. Действительно, из равенства

$$x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^3) = (x - y)((x - y)^2 + 3xy)$$

следует, что разность кубов двухнатуральных чисел либо делится на 9, либо не делится на 3. Но 2010 делится на 3 и не делится на 9.

3. Построить параллелограмм, у которого середины трех сторон лежат в заданных точках.

Решение. Средние линии параллелограмма в точке пересечения делятся пополам. Выберем какие-то две из заданных точек и будем считать их серединами параллельных сторон. Пусть это точки A и B. Тогда середина M отрезка AB есть точка пересечения средних линий. Соединим третью заданную точку C с точкой M и продолжим отрезок CM до точки D так что $CD = 2CM$. Тогда D есть середина четвертой стороны, и параллелограмм получится, если провести через точки A и B прямые параллельно CD, а через C и D – прямые параллельно AB. Поскольку исходнуюпару точек можно выбрать из 3 заданных тремя способами,то у задачи 3 решения.

4. Описанным кругом плоской фигуры называется наименьший из содержащих ее кругов, а вписанным – наибольший из содержащихся в ней кругов. Может ли ограниченная фигура иметь два различных

а) описанных

б) вписанных

круга ?

Решение. а) Нет, не может. Действительно, допустим, что фигура Ф имеет два различных описанных круга. Они имеют одинаковый радиус и различные центры. Тогда Ф содержится в пересечении этих кругов П. Пересечение П состоит из двух круговых сегментов, опирающихся на общую хорду описанных кругов. Но эта хорда меньше их диаметра, т.е. П, а вместе с ним и Ф, содержится в меньшем круге, диаметром которого служит эта хорда. Пришли к противоречию.

б) Может. Примером служит любой прямоугольник, не являющийся квадратом.

5. Сумма неотрицательных чисел a, b, c, d равна 1. Доказать, что тогда

$$ab + bc + cd + da \leqslant \frac{1}{4}.$$

Решение. Имеем $ab+bc+cd+da = (a+c)(b+d)$. Обозначим $a+c = x$. Тогда $ab+bc+cd+da = x(1-x) = \frac{1}{4} - (x-\frac{1}{2})^2 \leqslant \frac{1}{4}$.

10 класс

1. Найти все простые числа p и q такие что корни уравнения $x^2 + px + q = 0$ целые.

Решение. По теореме Виета произведение целых корней равно q, а их сумма $-p$. Из первого из этих утверждений следует,что либо один из корней равен 1,а второй q, либо один из корней равен -1,а второй $-q$. Первый случай невозможен, так как сумма корней в этом случае положительна. Итак, реализуется второй случай и $p = q + 1$. Тогда из соображений четности $p = 3$, $q = 2$.

2. Площадь треугольника равна четверти суммы квадратов двух его сторон. Найти угол между этими сторонами.

Решение. Обозначим эти стороны треугольника a и b, а угол между ними α. Тогда $\frac{1}{2}ab\sin\alpha = \frac{1}{4}(a^2+b^2)$ и отсюда $0 \leqslant (a-b)^2 = a^2+b^2-2ab = 2ab\sin\alpha - 2ab = 2ab(\sin\alpha - 1) \leqslant 0$. Отсюда $\alpha = 90°$.

3. У какого прямоугольника периметр численно равен площади, а стороны являются целыми числами ?

Решение. Пусть x и y - целые стороны прямоугольника. По условию $xy = 2x + 2y$, то есть $(x-2)(y-2) = 4$. Поэтому либо оба числа $x - 2$ и $y - 2$ равны 2, либо одно из них равно 1, а второе 4. Итак, существует два таких прямоугольника: квадрат со стороной 4 и прямоугольник 3×6.

4. Доказать, что функция

$$f(x) = \frac{1 + \sin x - \cos x}{1 + \sin x + \cos x}$$

нечетная при $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$.

Решение. После перехода к половинному аргументу получаем $f(x) = tg\frac{x}{2}$.

5. На плоскости задано $n \geqslant 3$ точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Площадь любого треугольника с вершинами в этих точках не превосходит 1. Доказать, что тогда существует треугольник площади $\leqslant 4$, содержащий все эти точки.

Решение. Рассмотрим все возможные треугольники с вершинами в заданных точках и выберем один из треугольников наибольшей площади. Пусть это $\triangle ABC$ площади $S \leqslant 1$. Пусть M - еще одна заданная точка. Поскольку площадь $\triangle MBC$ не превосходит S, то точка M удалена от прямой BC не больше, чем точка A, то есть она лежит в полосе, ограниченной прямыми, одна из которых проходит через точку A параллельно BC, а вторая симметрична первой относительно прямой BC. Очевидно, она лежит и в двух аналогичных полосах параллельных AB и AC. Значит, любая из заданныхточек лежит в пересечении этих трех полос, а это пересечение представляет собою треугольник площадью $4S \leqslant 4$.

11 класс

1. Какое наименьшее положительное число можно получить путем расстановки между числами

$$1, 2, 3, \ldots, 2010, 2011$$

знаков плюс и минус и выполнения этих операций ?

Решение. Здесь 1006 нечетных слагаемых, поэтому в результате всегда получается четное число. Наименьшее из положительных четных чисел равно 2. Покажем, что оно может быть получено. Для этого вначале расставить знаки так: $1-2+3 = 2$. Остальные 2008 чисел нужно разбить на четверки последовательных натуральных чисел и в каждой из них расставить знаки так: $n - (n+1) - (n+2) + (n+3) = 0$. Итак, это число равно 2.

2. При каких значениях положительных чисел a и b уравнение

$$\cos ax \cos bx = 1$$

имеет ненулевое решение ?

Решение. Величины $\cos ax$ и $\cos bx$ должны обе равняться 1 или -1. В первом случае получаем $ax = 2\pi m, bx = 2\pi n$, то есть отношение $\frac{a}{b} = \frac{m}{n}$ должно быть рациональным. Во втором случае приходим к тому же выводу. Итак, для того, чтоб уравнение имело ненулевое решение, необходима рациональность отношения $\frac{a}{b}$. Докажем, что это условие достаточное. Пусть $\frac{a}{b} = \frac{m}{n}$, где m и n – натуральные числа. Положим $x = \frac{2\pi m}{a}$. Тогда $ax = 2\pi m$, $bx = 2\pi n$, так что x – ненулевое решение уравнения. Итак, уравнение имеет ненулевые решения тогда и только тогда, когда отношение $\frac{a}{b}$ рационально.

3. Пусть h есть высота прямоугольного треугольника, опущенная на его гипотенузу,а r – радиус вписаной в этот треугольник окружности. Найти первую цифру после запятой в десятичной записи отношения $\frac{r}{h}$.

Решение. Обозначим через a и b катеты треугольника, через c его гипотенузу, через S его площадь, а через α – острый угол, противолежащий катету a. Тогда $2S = hc = r(a+b+c)$ и отсюда

$$\frac{r}{h} = \frac{c}{a+b+c} = \frac{1}{1+\cos\alpha+\sin\alpha}.$$

Но $\cos\alpha + \sin\alpha = \sqrt{2}\sin(\alpha + 45^\circ)$, и при $0 < \alpha < 90^\circ$ эта величина меняется от 1 до $\sqrt{2}$. Поэтому

$$0.5 > \frac{r}{h} > \frac{1}{1+\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1 > 0.4$$

и первая цифра после запятой в десятичной записи этого числа есть 4.

4. На горизонтальной плоскости лежат 4 шара радиуса R, а их центры образуют квадрат со стороной $2R$. Сверху в лунку, образованную этими шарами, положили пятый шар такого же радиуса. Найти расстояние от его высшей точки до плоскости.

Решение. Рассмотрим центры трех шаров – верхнего и двух нижних, образующих диагональ квадрата. Эти центры образуют равнобедреный треугольник. Его основание – диагональ квадрата, имеющая длину $2\sqrt{2}R$, а боковые стороны раны $2R$. Поэтому его высота равна $R\sqrt{2}$, а искомое расстояние $2R + R\sqrt{2} = R(2+\sqrt{2})$.

5. Доказать, что для любых неотрицательных чисел a, b, c, x, y, z справедливо неравенство

$$\sqrt[3]{xyz} + \sqrt[3]{abc} \leqslant \sqrt[3]{(x+a)(y+b)(z+c)}.$$

Решение. Если хотя быодно из чисел a, b, c, x, y, z равно нулю, то неравенство становится очевидным. Пусть все эти числа положительны. Поделим неравенство на его правую часть и получим эквивалентное неравенство

$$\sqrt[3]{XYZ} + \sqrt[3]{ABC} \leqslant 1,$$

где

$$X = \frac{x}{x+a}, Y = \frac{y}{y+b}, Z = \frac{z}{z+c}, A = \frac{a}{x+a}, B = \frac{b}{y+b}, C = \frac{c}{z+c}.$$

Но по неравенству о среднем арифметическом и среднем геометрическом

$$\sqrt[3]{XYZ} + \sqrt[3]{ABC} \leqslant \frac{1}{3}\left((X+A) + (Y+B) + (Z+C)\right) = 1,$$

что и требовалось доказать.